**Pololetní domácí práce (K4), 15. 4. - 21. 4.**

Toto je náhrada za pololetní písemnou práci. Klasifikaci potřebujeme uzavřít do 30. dubna, toto je její významná položka. Proto silně doporučuji dodržet termín 21. dubna, aby byl ještě čas na odladění případných problémů.

V první části (str. 1 - 4) jsou obsaženy vzorové řešené úlohy, převážně jde o opakování. Ve druhé části (str. 5) pak následuje 7 standardních a 1 bonusová úloha k vypracování, vzorové úlohy by měly dostačovat. Případně sledujte další odkazy, které dodám, ať již plošně, anebo na individuální vyžádání.

Zdůvodněte své výpočetní postupy a pracujte samostatně (s případnými dotazy na mě). Rád bych tímto rozlišil Vaši výkonnost na samém konci tohoto zvláštního pololetí. Věřím, že známky budou i tak lepší, než z klasické písemky. Mělo by jít o důstojné, byť zdravě namáhavé, loučení se středoškolskou matematikou.

**Část s návody**

**Kombinatorické pravidlo součinu – vzorová úloha**

*Ve třídě je 20 chlapců a 10 dívek. Kolik různých tanečních párů můžeme z nich vytvořit?*

Z množiny chlapců můžeme zástupce do tanečního páru vybrat 20 způsoby, z množiny dívek zástupkyni 10 způsoby. Počet možných párů potom odpovídá součinu obou čísel, tedy .

**Permutace – vzorová úloha**

Vzorec (permutační číslo, počet permutací na n prvcích)

*Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do řady při nástupu na tělocvik?*

Postup bez vzorce, kombinatorickým pravidlem součinu

Na první pozici v řadě vybíráme ze 20 možností (množiny 20 žáků), na druhou pozic v řadě už jen z 19 možností, na třetí pozici jen z 18 možností, a tak dále, nakonec na poslední (dvacátou) pozici „vybíráme“ už jen z 1 možnosti (kdo zbyl). Máme výsledek (přes 2,4 triliónu).

Jako elegantní zápis je vhodnější používat prostě jen 20! (čteme 20 faktoriál nebo faktoriál 20), anebo zápis cca(asi 2,433 triliónu).

Postup se vzorcem

Úlohy, v nichž přerovnáváme množinu, ale žádným způsobem nevyřazujeme její prvky, jsou úlohy permutační. Proto uplatníme vzorec na výpočet permutačního čísla , čímž dostáváme stejný výsledek, jako v předchozím postupu.

Je to možné asi 20! způsoby, což odpovídá asi 2,4 trilionům.

**Variace – vzorová úloha**

Vzorec (počet variací k-té třídy na n prvcích)

*Kolika způsoby se mohou umístit šest závodníků na medailových pozicích na olympiádě? Na barvě kovu záleží.*

Postup bez vzorce, kombinatorickým pravidlem součinu

Ke zlaté medaili dorazí 1 uchazeč ze 6 (6 možností). V okamžiku, kdy protne pásku, zůstává na dráze 5 uchazečů o stříbrnou medaili. Jakmile je o ní rozhodnuto, sledujeme boj 4 závodníků o bronz. Poté přestáváme závod sledovat, ve smyslu zadání úlohy. Počet možností je .

Postup se vzorcem

Jelikož přerovnáváme pořadí závodníků a zároveň z jejich množiny vybíráme podmnožinu medailistů (nezajímají nás nemedailové pozice, tj. 4., 5. a 6. místo), jedná se o variaci. Sledujeme k = 3 (uspořádání 3 nejlepších) a n = 6 (ze 6 závodníků).

Tím získáváme

Alternativně

Je to možné 120 způsoby.

**Kombinace – vzorová úloha**

Vzorec (počet kombinací k-té třídy na n prvcích, resp. kombinační číslo n nad k)

*Ve třídě je 30 žáků, z nichž tři budou zkoušení. Kolikerým způsobem je to možné, jestliže nezáleží na jejich pořadí?*

Postup bez vzorce, kombinatorickým pravidlem součinu – je v tomto případě již dosti komplikovaný.

Postup se vzorcem

Jelikož z žáků vybíráme podmnožinu zkoušených, ale nezajímá nás pořadí, v němž jdou k tabuli (a samozřejmě ani žádné pořadí zbylých žáků), jedná se o kombinaci. Sledujeme k = 3 (výběr 3 zkoušených) a n = 30 (ze 30 žáků).

Je to možné 4 060 způsoby.

**Pravděpodobnost jednodušší – vzorová úloha**

Pravděpodobnost složeného jevu (při stejně možných elementárních jevech)

*Určete pravděpodobnost, že při hodu 2 kostkami padne součet 10 nebo stejné číslo na obou kostkách.*

Pro správné porovnání si představme, že kostky obarvíme, jednu červeně a jednu modře.

(Zdůvodnění: Na výsledek 1 + 2 a výsledek 2 + 1 se díváme jako na různé výsledky, protože jde o dvě různé souhry náhod. Proto je vhodné kostky rozlišovat.)

Červenou kostku budeme psát vždy jako první, modrou vždy jako druhou. Při tomto způsobu zápisu máme 6-člennou množinu možných výsledků na první/červené kostce a 6-člennou množinu výsledků na druhé/modré kostce. Podle kombinatorického pravidla součinu možností.

Jak se může přihodit výhradně součet 10? (2 příznivé jevy) 4 + 6, 6 + 4

Jak se může přihodit výhradně stejné číslo na obou kostkách? (5 příznivých jevů) 1 + 1, 2 + 2, 3 + 3, 4 + 4, 6 + 6

Jak se mohou přihodit obě věci naráz? (1 (super)příznivý jev) 5 + 5

Pravděpodobnost, že kostky padnou podle zadání, je asi 22,2 %.

**Pravděpodobnost složitější – vzorová úloha**

*Ve třídě je 11 chlapců a 18 dívek. Vyvoláni budou tři žáci. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi budou právě dva chlapci?*

Roli stejně možných elementárních jevů hrají veškeré možné vyvolané trojice. Jelikož zde vybíráme podmnožinu zkoušených a na pořadí nám nikterak nezáleží, půjde o kombinaci (počet kombinací, kombinační číslo). Roli jevů příznivých potom hrají všechny trojice, které obsahují dva chlapce a jednu dívku.

Počet všech (stejně možných) elementárních jevů

To již snadno dopočítáme

Nyní potřebujeme spočítat příznivé jevy. Jak takový příznivý jev vznikne? Z 11 chlapců vybereme libovolnou dvojici, což lze uskutečnitzpůsoby. K tomu 18 dívek vybíráme jednotlivkyni, což samozřejmě dává 18 možností. (Fajnšmekři si sami ověří, že .)

Počet možností složení „vybraná dvojice chlapců + vybraná dívka“ už najdeme pomocí kombinatorického pravidla součinu (představme si, že v levém koši máme 55 lístků s možnými dvojicemi chlapců a v pravém koši 18 lístků se jmény dívek, poté z těchto osudí provádíme losování či skládání výsledné trojice). Tedy máme příznivých možností.

Nyní můžeme dotáhnout hledání pravděpodobnosti

Pravděpodobnost, že ve vylosované trojici budou právě 2 chlapci je asi 27,1 %.

**Statistika (aritmetický průměr) – vzorová úloha**

Vzorec pro průměr a další charakteristiky polohy

modus, mod x, je nejčastější hodnota sledovaného znaku

medián, med x, je „prostřední hodnota“, pokud vytvoříme uspořádané pořadí jednotek podle sledovaného znaku

*Žáci třídy dosáhli v písemce následujících známek: 10 jedniček, 4 dvojky, 6 trojek, 2 čtyřky, 4 pětky.*

*Jaká byla průměrná známka? Kolik žáků dosáhlo nadprůměrného výsledku (ve smyslu lepší známky)? Jaký byl modus (nejčastější výsledek)? Jaký byl medián (výsledek žáků, kteří mají stejné množství silnějších i slabších spolužáků)?*

Průměrná známka byla 2,46.

Nad průměrnou známkou tak bylo 14 žáků (jedničkářů a dvojkařů), zatímco pod ní jen 12.

Modus je 1, jde o nejčetnější známku.

Medián odpovídá „prostředním jedincům“, při sudém počtu tedy průměru 13. a 14. nejlepšího žáka. To jsou dva slabší dvojkaři (třeba podle bodů), ovšem jejich (společnou i průměrnou) známkou je 2. V tomto případě je medián nad průměrem, což odpovídá vychýlení z předminulé odpovědi – 14 nadprůměrných a 12 podprůměrných žáků.

(Tyto paradoxy známe třeba jako okřídlené rčení, že jen asi 30 % Čechů pobírá průměrnou a vyšší mzdu. Nebo paretovské rčení o tom, že 20 % nejbohatších lidí na Zemi disponuje 80 % zdrojů, a 80 % nejchudších disponuje 20 % zdrojů. Skutečnost může být ještě komplikovanější, ale paretovské pravidlo 20 – 80 je častým odrazem hlubších statistických zákonitostí.)

**Bonusová statistika (rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient) – vzorová úloha**

Vzorce pro charakteristiky variability

Rozptyl (výběrový)

Směrodatná odchylka (výběrová)

Variační koeficient

Relativní chyba

*Jakými charakteristikami bychom vyjádřili míru neuspořádanosti výsledků, nevyrovnanost třídy?*

10 jedničkářů nad průměrem třídy vyniká o 1,46, mají tedy kvadratické odchylky (sčítance čitatele)

- jedná se 1. - 10. žáka

4 dvojkaři nad průměrem třídy vynikají o 0,46, mají tedy kvadratické odchylky (sčítance čitatele)

- jedná se o 11. - 14. žáka

6 trojkařů za průměrem třídy zaostává o 0,54, mají tedy kvadratické odchylky (sčítance čitatele)

- jedná se o 15. - 20. žáka

2 čtyřkaři za průměrem třídy zaostávají o 1,54, mají tedy kvadratické odchylky (sčítance čitatele)

- jedná se o 21. - 22. žáka

4 pětkaři za průměrem třídy zaostávají o 2,54, mají tedy kvadratické odchylky (sčítance čitatele)

- jedná se o 23. - 26. žáka

Nyní již dosadíme do vzorce

Rozptyl výsledků má hodnotu asi 2,09, směrodatná odchylka činí 1,45 – je tedy řádově srovnatelná s průměrem a naznačuje výraznou nevyrovnanost výsledků. Variační koeficient je 58,79 % (relativní chyba je 0,5879). To opět ukazuje vysokou relevanci individuálních rozdílů.

**Část s úlohami**

**Kombinatorická úloha k rozpoznání typu a vypracování 1**

Kolika způsoby může skončit turnaj 6 týmů, jestliže sledujeme celé umístění, tj. od prvního do posledního místa?

**Kombinatorická úloha k rozpoznání typu a vypracování 2**

Na jídelním lístku je 12 druhů jídel. Kolika způsoby můžeme vybrat 4 různá jídla do denního menu?

**Kombinatorická úloha k rozpoznání typu a vypracování 3**

Ve třídě je 7 chlapců a 15 dívek. Kolik různých tanečních párů můžeme z nich vytvořit?

**Kombinatorická úloha k rozpoznání typu a vypracování 4**

Na vsi se každoročně pořádá soutěž v pojídání švestkových knedlíků. Do finálového kola postoupilo celkem 10 závodníků. Spočítejte, kolik celkem existuje možností, jak těchto šest účastníků může obsadit první 3 místa.

**Pravděpodobnost jednodušší – úloha k vypracování 5**

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu 2 kostkami bude:

1. Součet padlých čísel alespoň 9?
2. Součin padlých čísel (ostře) větší než 9?

**Pravděpodobnost složitější – úloha k vypracování 6**

Ve skupině je 7 chlapců a 5 dívek. Na výlet odešli 4 z nich. Jaká je pravděpodobnost, že odešli  
a) 3 chlapci a 1 dívka?, b) 2 chlapci a 2 dívky?

**Statistika (aritmetický průměr) – úloha k vypracování 7**

V podniku jsou čisté mzdy rozepsány následovně: Ředitel bere 120 000 měsíčně, jeho první zástupce bere 90 000 měsíčně, čtyři sekční šéfové berou po 75 000 měsíčně, 12 specialistů bere po 45 000 měsíčně a 32 řadových zaměstnanců bere po 25 000 měsíčně.

Spočtěte průměrnou podnikovou mzdu, modus mzdy, medián mzdy. Porovnejte průměr s mediánem a vysvětlete, proč se neshodují.

**Rozšiřující statistika (rozptyl a směrodatná odchylka) – úloha k vypracování (BONUS)**

Vypočtěte charakteristiky vyjadřující platovou nerovnost v podniku.