**Obtížnější příklady z kombinatoriky a pravděpodobnosti**

Cílem tohoto listu je doplnění, upevnění a rozšíření znalostí. Pokud Vás inspiruji k přepracování kteréhokoli cvičení z odevzdané čtvrtletky, rád jej ještě přijmu.

*(Počítáme výhradně permutace, variace a kombinace bez opakování, tj. jednotlivé prvky se nemohou opakovat. Permutace, variace a kombinace s opakováním se učí na gymnáziích.)*

**Permutace:** Když nějakou množinu (řadu, závod, turnaj, číselnou šifru, ...) přerovnáváme jako celek a zajímá nás počet možností, jak to lze učinit. (*n* značí velikost množiny)

počet permutací na *n* prvcích

**Variace:** Když z nějaké množiny (závodu, turnaje, číselného generátoru, ...) vybíráme podmnožinu (medailisty, telefonní číslo), sledujeme přesné pořadí vybraných prvků a zajímá nás počet možností, jak to lze učinit. (*n* značí velikost celé množiny, *k* velikost podmnožiny)

počet variací *k*-té třídy na *n* prvcích

**Kombinace:** Když z nějaké množiny (kvalifikačního turnaje, školní třídy) vybíráme podmnožinu (postupující, vyřazené, zkoušené, ušetřené), ale nezajímá nás přesné pořadí vybraných prvků a zajímá nás počet možností, jak takový výběr můžeme učinit. (*n* značí velikost celé množiny, *k* velikost podmnožiny)

počet kombinací *k*-té třídy na *n* prvcích

**Pravděpodobnost:** Umožňuje-li to interpretace příkladu, můžeme najít počet všech stejně možných výsledků, poté analyzovat, které výsledky jsou příznivé požadavkům zadání a finalizovat vzorcem

**Komentář k úlohám 1-4 z pololetky**

V pololetní práci se objevila úloha o soutěži v pojídání švestkových knedlíků. Zde šlo o to správně rozpoznat, zda je podobná řešené úloze 1, anebo řešené úloze 2. Počítali jste celkem hezky, ale s rozpoznáním byl problém.

*Na vsi se každoročně pořádá soutěž v pojídání švestkových knedlíků. Do finálového kola postoupilo celkem 10 závodníků. Spočítejte, kolik celkem existuje možností, jak těchto 10 účastníků může obsadit první 3 místa.*

Dále prozradím, že jedna z dalších úloh jde také podle těchto vzorových příkladů řešit a další dvě jsou spíše jednodušší.

**Komentář k úloze 6 z pololetky**

Inspiraci můžete najít v řešené úloze 3, ale ještě úplněji v listu, který byl součástí pololetky. Tato úloha byla záměrně náročnější.

**Řešená úloha 1 (Kombinatorická slovní úloha)**

V olympijském finále běží 8 závodníků, přítomné novináře zajímá - kolika způsoby mohou být obsazeny stupně vítězů? (Zlatá, stříbrná, bronzová medaile.)

**Řešení úlohy 1**

Na řešení úlohy můžeme přijít dvěma způsoby, mírně doporučuji ten první – princip je univerzálnější a spíše si jej vybavíte a obnovíte i po několika letech bez matematiky.

a) Kombinatorickým pravidlem součinu

Představíme si, že zapisujeme pořadí na cílové čáře. V souboji o vítěze je 8 závodníků, takže máme 8 možností, jak bude přidělena zlatá medaile. V okamžiku rozhodnutí zůstává na dráze 7 uchazečů o stříbro. Když je o něm rozhodnuto, bojuje ještě 6 uchazečů o bronz. Po přidělení bronzu nás již další pořadí nijak nezajímá. Podle kombinatorického pravidla součinu je tedy možností medailového výsledku .

b) Užitím vzorce

Rozpoznáme, zda jde o permutaci, variaci nebo kombinaci. Permutace by odpovídala čistému řazení všech účastníků závodu. Kombinace by odpovídala výběru podskupiny, ale naopak bez sledování přesného pořadí. Variace v sobě spojuje otázku řazení (přesné medaile) i výběru (sledujeme jen 3 nejlepší z 8). A kolik je variací 3. třídy z 8 prvků?

.

**Řešená úloha 2 (Kombinatorická slovní úloha, podobná i odlišná od předchozí)**

V olympijském semifinále běží 8 závodníků, přítomné novináře zajímá - kolika způsoby mohou být obsazeny 3 jistá kvalifikační místa pro finále? Ani závodníkům příliš nezáleží na tom, z jakého místa postoupí – i slavný Usain Bolt občas v semifinále cílovou rovinku vypustí a netrápí ho, že skončí 2. či 3.

(Obvykle to je tak, že z každého ze 2 semifinále postupují první 3 závodníci, přičemž 7. a 8. účastnická pozice ve finále je přidělena dodatečně podle času. Často se stane, že z kvalitnějšího semifinále nakonec postoupí 5 závodníků a z toho méně kvalitního jen 3. Podobně funguje systém divizí a konferencí v hokejové NHL.)

a) Kombinatorickým pravidlem součinu

Zde bychom museli pravidlo velmi promýšlet, proto v tomto případě nedoporučuji. Mohli bychom sice v cíli zapisovat pořadí, ale musíme si uvědomit, že kvalifikovaná trojice (I) Bolt - Gatlin - Powell je tentokrát považována za jeden a ten samý výsledek jako trojice (II) Bolt – Powell – Gatlin, (III) G. - B. - P., (IV) G. - P. - B., (V) P. - B. - G., (VI) P. - G. - B.

Jinak řečeno, až naměříme počet ,,medailových trojic´´, musíme to vydělit 6-kou, abychom výsledek správně redukovali. A proč zrovna 6-kou? Protože 6 = 3! = P(3) je počet permutací na trojici postupujících závodníků. Je tedy 336:6 = 56 možností, jak může vzniknout postupová trojice.

b) Užitím vzorce

Zde doporučuji vzorcový postup, který má v sobě již zahrnuty všechny předchozí úvahy. Na rozdíl od permutací nás nezajímají všichni závodníci, ale jen postupující skupina. Na rozdíl od variací (i permutací) nás nikterak nezajímá přesné pořadí. Jde o kombinaci – výběr podmnožiny bez určení přesného pořadí. A kolik je kombinací 3. třídy z 8 prvků? Odpovědí je kombinační číslo 8 nad 3.

. Stejně jako v předchozím postupu nám tedy vychází 56 možností, jak se vytvoří kvalifikovaná trojice.

\*c) Trik na výpočet kombinačního čísla

Do dostatečně zdatné kalkulačky zadáme - v tomto čísle hrají nuly roli rozdělovníků (měly by tam být, jinak nás takový postup může oklamat) a ostatní čísla reprezentují 8. řádek Pascalova trojúhelníku (vznikla jako 8. mocnina).

(Když z 8 lidí nepostoupí nikdo, může se to stát jediným způsobem. A když všichni, je to stejné.)

(Když ze 7 lidí 1 vybereme, anebo naopak 1 vyřadíme, jde to 8 možnostmi.)

(Když ze 7 lidí 2 vybereme, anebo naopak 2 vyřadíme, jde to 28 možnostmi.)

(Když ze 7 lidí 3 vybereme, anebo naopak 3 vyřadíme, jde to 56 možnostmi.)

(Když z 8 lidí 4 vybereme (neboli 4 vyřadíme), jde to 70 možnostmi.)

**Řešená úloha 3 (Pravděpodobnost + kombinatorika)**

Určete pravděpodobnost, že z osudí, ve kterém je 10 bílých, 10 červených a 10 modrých kuliček, budou vytaženy 3 kuličky téže barvy. (Přitom platí, že po vytažení se už kulička nevrací do osudí!)

**Řešení úlohy 3**

Co je elementárním a stejně možným jevem v příkladu? Vytažení nějaké trojice ze 30 možných kuliček. Kolik takových výsledků může nastat? Protože na pořadí, v jakém dojde k losu, nezáleží, jde o výběr podmnožiny bez sledování pořadí, tedy o kombinaci.

Příznivým (složeným) jevem jsou všechny výsledky, kdy trojice vzejde z jedné barevné skupiny. Kolik způsoby se to může přihodit? Všemi způsoby, kdy vylosujeme 3 z 10 bílých kuliček (a tím pádem nikdy jinou barvu), pořadí nikterak neřešíme. A k tomu všemi způsoby, kdy vylosujeme 3 z 10 červených kuliček (a tím pádem nikdy jinou barvu), pořadí nikterak neřešíme. A ještě všemi způsoby, kdy vylosujeme 3 z 10 modrých kuliček (a tím pádem nikdy jinou barvu), pořadí nikterak neřešíme. Počty těchto způsobů sečteme.

Nyní již můžeme uplatnit klasický vzorec

Pravděpodobnost, že vytáhneme tři koule stejné barvy je tedy přibližně (nezanedbatelných) 8,9 %.

**Rozšiřující úloha 3+ (aneb síla vzorců v matematice, jak zabít sedm much jednou ranou)**

Určete pravděpodobnost, že z osudí, ve kterém je 10 bílých, 10 červených a 10 modrých kuliček, budou vytaženy a) 1 kulička stejné barvy, b) 2 kuličky stejné barvy, c) 3 kuličky stejné barvy, d) 4 kuličky stejné barvy, e) 5 kuliček stejné barvy, f) 6 kuliček stejné barvy, g) 7 kuliček stejné barvy, h) 8 kuliček stejné barvy, i) 9 kuliček stejné barvy, j) 10 kuliček stejné barvy.

**Řešení úlohy 3+**

Nejprve prozkoumáme body a), b), c). Na body d) – j) si poté připravíme matematický nástroj na míru.

a) 100 % je zřejmé.

c) 8,9 % je z předchozí úlohy, ale v návaznosti na b) můžeme najít alternativní postup.

b) Lze spočítat vcelku snadno. V prvním tahu vytáhneme kuličku nějaké barvy a zůstáváme v každém případě v naději, že druhý tah barvu potvrdí. Druhý tah potom sám o sobě rozhodne, zda půjde o pokus zdárný nebo nezdárný. V osudí setrvává 29 kuliček, z nichž 9 je shodných s již taženou (což chceme) a 20 je odlišných. Čili 9 z 29 (druhých) tahů je příznivých, zcela bez ohledu na to, co bylo v předchozím tahu. A tím jsme vlastně hotovi.

, takže pravděpodobnost je asi 31 %. (Všimněte si, že je o trochu méně než třetinová. Přesně třetinová by byla tehdy, kdybychom kuličku po losu vraceli do osudí. Tím, že ji nevracíme, se nám pravděpodobnost kýženého losování lehce sníží.)

c) Alternativní postup podle předchozího bodu

V prvním tahu vytáhneme kuličku nějaké barvy a zůstáváme v každém případě v naději, že druhý i třetí tah barvu potvrdí. Jak už víme z předchozího bodu, je pravděpodobnost 9/29, že po druhém tahu budeme držet stejnobarevnost. Jaká je následná pravděpodobnost, že třetí tah potvrdí situaci?

V osudí zbývá 28 kuliček, z nich 8 má stejnou barvu, jako ty dvě již vytažené.

, tedy asi 28,6 %.

K vypočtení celkové pravděpodobnosti musíme oba zlomky vynásobit. (Asi 31 % losů dopadne tak, že po 2. tahu je ještě o co hrát. A z nich 28,6 % dopadne i úspěšným 3. tahem. Podíl z podílu se samozřejmě získává vynásobením podílů.)

, tedy stejných 8,9 %, jako při jiném postupu úvahy.

d) – j) **Postup úvahový**

Jednobarevný čtyřtah nastane tak, že provedeme jednobarevný trojtah (u něj jsme již našli pravděpodobnost ) a následně taháme z osudí, v němž zbývá ještě 27 kuliček, mezi nimi 7 s příznivou barvou. Dosavadní pravděpodobnost přenásobujeme číslem 7/27, takže

(což je asi 2,3 %)

Analogicky k jednobarevnému pětitahu musíme přidat úspěšný tah některé 6 vhodných kuliček mezi 26 zbývajícími.

(což je asi 0,53 %)

Analogicky potom dostaneme

(což je asi 0,11 %)

(což je asi 0,018 %)

(což je asi 0,002 3 %)

(což je asi 0,000 21 %)

(což je asi 0,000 01 %)

d) – j) **Postup vzorečkový - úlohy spojíme do jediné a děláme kouzla se vzorci**

Určete pravděpodobnost, že z osudí, ve kterém je 10 bílých, 10 červených a 10 modrých kuliček, bude vytaženo N kuliček téže barvy.

Celkový počet výsledků (skupina N-kuliček ze všech 30, tzv. N-tice)

Počet příznivých výsledků (N-tice kuliček z 10 jediné barvy, ale ve třech barevných verzích)

Celková pravděpodobnost (příznivé jevy děleno všechny jevy)

(dělení zlomkem je násobení zlomkem převráceným)

(vykrátili jsme N!, teď ještě 30-ku)

je univerzální vzorec pro pravděpodobnost tažení N kuliček stejné barvy

Pro otázky na 4 – 10 shodných kuliček potom získáváme pravděpodobnosti

(což je asi 2,3 %)

(což je asi 0,53 %)

(což je asi 0,11 %)

(což je asi 0,018 %)

(což je asi 0,002 3 %)

(což je asi 0,000 21 %)

(což je asi 0,000 01 %)