**Odvozování vzorců a rekurentní zápisy, od 27. 5. 2020**

Cílem tohoto listu je pomoci Vám s úlohami TechAmbition, které se zabývají posloupnostmi a třeba se k nim v rámci vylepšování klasifikace chcete vrátit, anebo je doplnit.

V minulém podpůrném list (Matematika\_K2\_PodpurnyListPosloupnostiKompletni.docx) jsem uváděl 6 posloupností, na jejichž zkoumání zde navážeme.

**Ukázka I**

Nejprve jsme měli posloupnost začínající čísly

, , , , …

O té jsme zjistili, že není ani aritmetická ani geometrická. Účastníci čtvrteční videohodiny se potom dozvěděli další informace, které zde ještě jednou přepíši, byť bez obrázků.

**Odvození rekurentního zápisu**

Povšimneme si, že „skok“ mezi 1. a 2. členem je +3, mezi 2. a 3. členem je +5, mezi 3. a 4. členem je +7, atd. (+9, +11, +13, +15, +17, +19, +21, …)

Poté již můžeme uhodnout další členy , , , , , , , , , , , …

Nyní si celou myšlenku zvětšujících se skoků zapišme symbolicky

Rozdíl mezi *(n+1).* a *n.* členem je vždy dvojnásobkem *n* zvětšeným o 1, přičemž posloupnost začíná číslem 2. Můžeme shrnout do stručného rekurentního zápisu

,

**Odvození zápisu vzorcem**

Nalezneme vhodnou zákonitost pro již napočítané členy

…

Z těchto poznatků již můžeme formulovat vzorec pro n-tý člen

Celou posloupnost potom můžeme psát ve tvaru

Tento symbol chápeme tak, že bereme jednotlivá přirozená čísla až do nekonečna (postupně n = 1, n = 2, n = 3, n = 4, … , n = ∞), dosazujeme je do vzorce, a tak vytvoříme posloupnost.

**Kdy je vzorec pro n-tý člen výhodnější?**

Když se nás nepřítel zeptá na 20. člen posloupnosti, můžeme jej počítat rekurentně jako Což je trochu pracné, anebo si alespoň vyžádá další vzorec.

S přímým vzorcem však stačí spočítat .

**Ukázka II**

Dále jsme měli posloupnost začínající čísly

, , , , …

O ní jsme zjistili, že je aritmetická, s pravidly , .

**Rekurentní zápis**

Poměrně snadno viditelný , .

**Zápis vzorcem**

Můžeme jej odvodit z obecného vzorce pro aritmetickou posloupnost , kde dosazujeme

Alternativně postupujeme tak, že si představíme „fiktivní nultý člen“ a potom uvažujeme, že 1. člen je „po 1 skoku“ (proto je o 3 větší na -8), 2. člen je „po 2 skocích“ (proto je o 6 větší na -5), 3. člen je „po 3 skocích“ (proto je o 9 větší na -2) atd.

Odtud získáme (dva možné zápisy vzorcem pro n-tý člen).

Celá posloupnost se potom píše jako nebo .

**Ukázka III**

Následovala posloupnost začínající čísly

, , , , …

O ní jsme zjistili, že je geometrická, s pravidly , .

**Rekurentní zápis**

Poměrně snadno viditelný , .

**Zápis vzorcem**

Můžeme jej odvodit z obecného vzorce pro geometrickou posloupnost , kde dosazujeme

Při úpravách jsme využili vzorce

, aplikovaného v podobě

Dále můžeme zjednodušit

, potom

, potom

Kromě zápisu vzorcem

s celou poslopností jako ,

máme také alternativní zápis:

Je-li *n* liché, potom . Je-li *n* sudé, potom .

**Ukázka IV**

Další posloupnost začínala takto

, , , , …

O ní jsme zjistili, že jde o konstantní posloupnost, kterou můžeme zařadit do obou sledovaných kategorií – aritmetických i geometrických posloupností.

**Rekurentní zápis**

Nemá zde valného smyslu, ale můžeme jej sestavit např. takto , .

**Zápis vzorcem**

Je v tomto případě velmi jednoduchý , celá posloupnost potom má podobu .

**Ukázka V**

Předposlední posloupnost jsme minule odvodili v podobě

Aritmetická, , .

**Rekurentní zápis**

Opět je velmi snadný, , .

**Zápis vzorcem**

Podobně jako v Ukázce II spočítáme „fiktivní nultý člen“ , od něhož na každém dalším kroku odebíráme šestku (1. člen , 2. člen , 3.člen atd.).

Tím dostáváme zápis , resp. .

**Ukázka VI**

Poslední posloupnost z minula měla podobu

Geometrická, , .

**Rekurentní zápis**

Opět je velmi snadný, , .

**Zápis vzorcem**

Podobně jako v Ukázce II a Ukázce V spočítáme „fiktivní nultý člen“ , který tentokrát dělíme mocninami trojky, tedy , , atd.

Odtud již dostáváme zápis , resp. .