**Exponenciální funkce, únor 2021**

ROZDÍL MEZI MOCNINNOU A EXPONENCIÁLNÍ FUNKCÍ

Mocninná funkce (starší učivo), proměnná x (do níž dosazujeme z vodorovné osy) je umocňována pevně daným exponentem.

Příklad: $f:y=x^{2}$

Exponenciální funkce (nové učivo), proměnná x (do níž dosazujeme z vodorovné osy) je exponentem pevně daného čísla.

Příklad: $f:y=2^{x}$

Exponenciální funkce čili exponenciála je matematická funkce ve tvaru

$f:y=a^{x}$*,* kde $a>0, a \ne 1$.

Pevně dané číslo *a* se nazývá základ (báze). Proměnné *x* se říká exponent (mocnitel).

Video (začátečnické) <https://www.youtube.com/watch?v=nqpn0SQB5ds>

Video (pokročilé)

<https://www.youtube.com/watch?v=Kas0tIxDvrg>

**Příklad 1:** Doplňte tabulku s hodnotami funkce . Poté sestavte graf!

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y=2x | 1/8 = 0,125 | ¼ = 0,25 | ½ = 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |

$$2^{3}=2∙2∙2=8$$

$$2^{2}=2∙2=4$$

$$2^{1}=2$$

$$2^{0}=1$$

$$2^{-1}=\frac{1}{2}$$

$$2^{-2}=\frac{1}{2∙2}=\frac{1}{4}$$

$$2^{-3}=\frac{1}{2∙2∙2}=\frac{1}{8}$$

(cokoliv na nultou je 1, s jistým sporem o to, zda i 0 na 0-tou je 1)

**Příklad 2:** Doplňte tabulku s hodnotami funkce 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  |  |  |  |  |  |

**Příklad 3:** Do jednoho grafu vyneste obě předchozí funkce

**Příklad 4:** Zodpovězte následující otázky

1. Jaký je průsečík funkce s osou *y*?
2. Jaký je průsečík funkce s osou *y*?
3. Jaký je průsečík funkce s osou *x*?
4. Jaký je průsečík funkce s osou *x*?
5. Jaký je definiční obor obou funkcí?
6. Jaký je obor hodnot obou funkcí?
7. Na jakém intervalu jsou obě funkce rostoucí?
8. Na jakém intervalu platí ?
9. Na jakém intervalu platí ?

**Příklad 5:** Doplňte tabulku s hodnotami funkce 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  |  |  |  |  |  |

**Příklad 6:** Doplňte tabulku s hodnotami funkce 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  |  |  |  |  |  |

**Příklad 7:** Do jednoho grafu vyneste obě předchozí funkce. Zformulujte, co je na tomto grafu zajímavého.

**Příklad X:** Doplňte tabulku s hodnotami funkce $f:y=5^{x}$a sestavte graf.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 0,008 (1/125) | 0,04(1/25) | 0,2 (1/5) | 1 | 5 | 25 | 125 |

$f\left(x\right)∙f\left(-x\right)=1$ … najdu si v tom vzorec! (Součin funkčních hodnot ve dvou navzájem opačných bodech je vždy 1.)

$$5^{3}=5∙5∙5=125$$

$$5^{2}=5∙5=25$$

$$5^{1}=5$$

$$5^{0}=1$$

$$5^{-1}=\frac{1}{5}$$

$$5^{-2}=\frac{1}{5∙5}=\frac{1}{25}$$

$$5^{-3}=\frac{1}{5∙5∙5}=\frac{1}{125}$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

$$5^{-3}=\frac{1}{5^{3}}=\frac{1}{125}$$

**Příklad Y:** Doplňte tabulku s hodnotami funkce $ g:y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$a sestavte graf.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 125 | 25 | 5 | 1 | 0,2 (1/5) | 0,04 (1/25) | 0,008 (1/125) |

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3}=\frac{1}{5}∙\frac{1}{5}∙\frac{1}{5}=\frac{1∙1∙1}{5∙5∙5}=\frac{1}{125}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2}=\frac{1}{5}∙\frac{1}{5}=\frac{1∙1}{5∙5}=\frac{1}{25}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{1}=\frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{0}=1$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)\*\left(\frac{1}{5}\right)^{}}=\frac{1}{\frac{1}{25}}=25$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)\*\left(\frac{1}{5}\right)\*\left(\frac{1}{5}\right)^{}}=\frac{1}{\frac{1}{125}}=125$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

Co když mi do a vleze zlomek 1/něco? Něco nazvu b a uvažuji dál.

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{b}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{1}{b}∙\frac{1}{b}∙…∙\frac{1}{b}}=\frac{1}{\frac{1}{b∙b∙b∙b…}}=\frac{1}{\frac{1}{b^{n}}}=\frac{1}{1}\*\frac{b^{n}}{1}=b^{n}$$

$$\left(\frac{1}{17}\right)^{-14}=17^{14}$$

$$\left(\frac{19}{123}\right)^{-5}=\left(\frac{123}{19}\right)^{5}$$

$$f:y=5^{x}$$

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 0,008 (1/125) | 0,04(1/25) | 0,2 (1/5) | 1 | 5 | 25 | 125 |

$$g:y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$$

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 125 | 25 | 5 | 1 | 0,2 (1/5) | 0,04 (1/25) | 0,008 (1/125) |

**Zákonitost**

Pokud máme exponenciální funkce typu $f:y=a^{x}$ a zvolíme dva navzájem převrácené základy, potom získáme dva osově souměrné grafy podle osy *y*.

**Důkaz**

(Logická úvaha, proč to musí platit.)

Mějme tedy funkce $f:y=k^{x}$ a $g:y=l^{x}$ , kde k, l jsou převrácená čísla.

To znamená, že $k=\frac{1}{l}$ a $l=\frac{1}{k}$

Potom platí, že pro každé reálné x je

$$g\left(x\right)=l^{x}=\left(\frac{1}{k}\right)^{x}=\left(k^{-1}\right)^{x}=k^{-x}=f(-x)$$

Další poznatky o exponenciálních funkcích (vhodné také pro aktuální úkol, cvičení 3)

Exponenciální funkce jsou monotónní v celém R (stále rostoucí nebo stále klesající, ale nedojde ke změně).

Jestliže základ *a* funkce $f:y=a^{x}$ je větší než 1, potom je funkce stále rostoucí (na celém R).

Jestliže základ *a* funkce $f:y=a^{x}$ je menší než 1 (mezi 0 a 1), potom je funkce stále klesající (na celém R).

Jestliže je základ 0 či 1, je to konstantní funkce, to není sledovaná kategorie.

Jestliže je základ záporný, nelze funkci spojitě definovat.

$f:y=a^{x}$*,* kde $a>0, a \ne 1$.

Žádná exponenciální funkce typu $f:y=a^{x}$ nemá průsečík s osou x, obor hodnot jsou totiž (ostře) kladná čísla.

Každá exponenciální funkce typu $f:y=a^{x}$ má jediný průsečík s osou y, ten je $\left[0, 1\right]$.

Exponenciální funkce

Běžný (průměrný, typický) atmosférický tlak v závislosti na nadmořské výšce má charakter (přenásobené) exponenciální funkce.

Tlak v hektopascalech

$$p\left(x\right)=p\_{0}∙0,88^{h}=1013,25∙0,88^{h}$$

P\_O je tlak při hladině moře

H nadmořská výška v km

**Jednoduché exponenciální rovnice**

**Společně řešený příklad 8:** Řešte jednoduchou exponenciální rovnici

$2^{x}=8$

**Společně řešený příklad 9:** Řešte jednoduchou exponenciální rovnici

$3^{x}=81$

**Příklad 10:** Řešte následující exponenciální rovnice

1. $2^{x}=4$
2. $3^{x}=27$
3. $4^{x}=1$
4. $5^{x}=\frac{1}{25}$
5. $6^{x}=0$
6. $7^{x}=-7$
7. $8^{x}=-40$
8. $9^{x}=\frac{1}{81}$
9. $10^{x}=1000$
10. $10^{x}=0,001$

**Společně řešené příklady 11**

Řešte exponenciální rovnice

1. $2^{x}+2^{x+1}=12$
2. $3^{x}+3^{x+2}=\frac{10}{3}$

**Příklady 12**

Řešte exponenciální rovnice

1. $2^{x}+2^{x+4}=68$
2. $5^{x}+5^{x+2}=130$

**Společně řešené příklady 13**

Řešte exponenciální rovnice

1. $4^{x}=32$
2. $8^{x}=16$
3. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x}=4$
4. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x}=8$

**Příklady 14**

Řešte exponenciální rovnice

1. $9^{x}=\frac{1}{3}$
2. $25^{x}=125$
3. $81^{x}=27$
4. $3^{x}=-9$
5. $4^{x}=\frac{1}{2}$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4$

**Exponenciální funkce a rovnice (pokračování)**

**Klíčový vzorec I**

Umocňování celé mocniny vede na součin exponentů.

$\left(a^{r}\right)^{s}=a^{rs}$

**\*Důsledek KVI**

Odmocňování mocniny vede na podíl exponentů.

$$\sqrt[s]{a^{r}}=a^{\frac{r}{s}}$$

**Společně řešené příklady 15**

Řešte exponenciální rovnice

1. $4^{x}=32$
2. $8^{x}=16$
3. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x}=4$
4. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x}=8$

**Příklady 16**

Řešte exponenciální rovnice

1. $9^{x}=\frac{1}{3}$
2. $25^{x}=125$
3. $81^{x}=27$
4. $3^{x}=-9$
5. $4^{x}=\frac{1}{2}$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4$
7. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x}=3$
8. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x}=4$

**\*Příklady 17**

Řešte exponenciální rovnice

1. $16∙2^{x+1}=4∙8^{x}$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=4∙4^{x}$
3. $5^{3}∙5^{9}=\left(5^{x}\right)^{3}$
4. $5^{3y}=5∙5^{y}$

**Klíčový vzorec II**

Součin mocnin stejného čísla odpovídá mocnině tohoto čísla se sečteným exponentem.

$a^{r}∙a^{s}=a^{r+s}$

**\*Důsledek KVII**

Podíl mocnin stejného čísla odpovídá mocnině tohoto čísla s rozdílem exponentů.

$$\frac{a^{r}}{a^{s}}=a^{r-s}$$

**Společně řešené příklady 18**

Řešte exponenciální rovnice

1. $2^{x}+2^{x+1}=12$
2. $3^{x}+3^{x+2}=\frac{10}{3}$

**Příklady 19**

Řešte exponenciální rovnice

1. $2^{x}+2^{x+4}=68$
2. $5^{x}+5^{x+2}=130$

**Osvojení práce s exponenciálními rovnicemi**

Krok Ia)

Rovnice typu $a^{x}=b$, v nichž *x* vychází přirozené.

Krok Ib)

Rovnice typu $a^{x}=b$, v nichž *x* vychází celočíselné.

**Společně řešené příklady:** Řešte jednoduché exponenciální rovnice

$2^{x}=8$

$3^{x}=81$

$$10^{x}=1$$

$$6^{x}=\frac{1}{36}$$

$$4^{x}=\frac{1}{64}$$

$$100^{x}=0$$

$$5^{x}=-10$$

Krok Ic)

Rovnice typu $a^{x}=b$, v nichž *x* vychází racionální.

**Společně řešené příklady:** Řešte exponenciální rovnice

1. $4^{x}=32$
2. $8^{x}=16$
3. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x}=4$
4. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x}=8$

Krok IIa)

Rovnice typu $a^{x+k}+a^{x+l}=b$, v nichž *x* vychází přirozené.

**Společně řešené příklady:** Řešte exponenciální rovnice

Řešte exponenciální rovnice

1. $2^{x}+2^{x+1}=12$
2. $3^{x}+3^{x+2}=\frac{10}{3}$

Krok IIb) ---- Rovnice typu $a^{x+k}+a^{x+l}=b,$ v nichž *x* vychází celočíselné. Krok IIc) ----- Rovnice typu $a^{x+k}+a^{x+l}=b$, v nichž *x* vychází racionální.