**Racionální funkce: Lineární lomené funkce, 27./28. 1. 2021**

Racionální funkce je jakákoliv funkce, kterou lze vyjádřit jako podíl dvou mnohočlenů.

$f:y=\frac{P\_{m}\left(x\right)}{Q\_{n}\left(x\right)}=\frac{a\_{m}x^{m}+a\_{m-1}x^{m-1}+…+a\_{1}x+a\_{0}}{b\_{n}x^{n}+b\_{n-1}x^{n-1}+…+b\_{1}x+b\_{0}}$ , kde $Q\_{n}(x)\ne 0$.

Lineární lomená funkce je jakákoliv funkce, kterou lze zapsat jako podíl dvou lineárních funkcí.

$f:y=\frac{ax+b}{cx+d}$ , kde $a, b, c, d \in R ;c\ne 0$.

Nepřímá úměrnost je speciální (jednoduchý) typ lineární lomené funkce, který lze zapsat ve tvaru

$f:y=\frac{k}{x} $, kde $k\in R$. (Tedy (reálné číslo) : (proměnná).) Definičním oborem i oborem hodnot jsou nenulová čísla. Konkrétní zadání slovních úloh potom často tyto obory dále zužuje.

**Úloha 1**

Obsah obdélníku je $S=8cm^{2}$. Napište vztah mezi velikostmi jeho stran. Zobrazte tento vztah graficky. Určete z grafu stranu čtverce o stejném obsahu.

Pomocná tabulka pro sestrojení grafu

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Strana *a* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Strana *b* (aby plocha činila 8) |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Úloha 2**

Skupina 12 dělníků (stejně výkonných) vykoná určitou práci za 40 dní. Vyjádřete, jak bude záviset počet dní *y*, kdy je tato práce vykonána, na počtu dělníků *x*. Znázorněte tuto závislost graficky. (Nápověda: Nepodaří-li se Vám odvodit předpis vhodné funkce, vězte, že jde o $f:y=\frac{480}{x}$.)

Když přijde dělníků 24 (2x více) je práce hotová za 20 dní.

Když přijde dělníků 4 (3x méně) je práce hotová za 120 dní.

**Nepřímá úměrnost.**

Když přijde 1 dělník (12x méně), bude práce hotová 480 dní (12x déle).

Když přijde 480 dělníků (40x více), bude práce hotová za 1 den (40x rychleji).

**Lze si všimnout, že součin je stále 480.**

Jak dlouho to trvá 30 dělníkům? 16, aby byl součin 480. (480:30 = 16)

Jak dlouho to trvá 32 dělníkům? 15, … (480:32 = 15)

Jak dlouho to trvá 16 dělníkům? 30, … (480:16 = 30)

Jak dlouho to trvá 15 dělníkům? 32, … (480:15 = 32)

12 dělníků … 40 dní

15 dělníků … y dní

----------------------------------

$$\frac{y}{40}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

$$y=32$$

Chci-li rychlé odpovědi na otázky, postavím si funkci

$$f:y=\frac{480}{x}$$

$$dělníci krát dny=xy=480$$

**Úloha 3**

Sestrojte graf funkce $f: t=\frac{s}{v}$, je-li dráha $s=80km$ a rychlost $v$ od 1 km/h do 100 km/h. Z grafu určete čas pro

a) $v=8 km/h$

b) $v=16 km/h$

c) $v=20 km/h$

d) $v=40 km/h$

**\*Úloha 4**

Kolo průměru *d* metrů se otočilo na dráze $s=40 m$ celkem *n*-krát. Jaká je závislost mezi průměrem *d* metrů kola a počtem otáček *n*? Znázorněte tuto závislost graficky.

**Obecná lineární lomená funkce**

$f:y=\frac{ax+b}{cx+d}$ , kde $a, b, c, d \in R ;c\ne 0$.

Příklad

$$f:y=\frac{-7x+11}{5x-4}$$

Když mám udělat graf takové funkce, zjednoduším ji částečným vydělením.

$$f:y=\frac{6x+4}{3x-1}$$

$$\left(6x+4\right):\left(3x-1\right)=2+\frac{6}{3x-1}=2+\frac{2}{(x-\frac{1}{3})}$$

Podobá se to nepřímé úměrnosti

$$f:y=\frac{2}{x}$$

2 (3x-1) = 6x -2

 6x + 4 = 6x + 4

* (6x -2) = -6x + 2

 +6

$$f:y=\frac{6x+4}{3x-1}=\frac{(6x-2)+6}{3x-1}=\frac{2(3x-1)}{3x-1}+\frac{6}{3(x-\frac{1}{3})}=2+\frac{2}{(x-\frac{1}{3})}$$

**Asymptota**

$$f:y=\frac{5x+3}{6x+4}=\frac{5(x+\frac{3}{5})}{6(x+\frac{2}{3})}=\frac{5}{6}∙\frac{x+\frac{10}{15}-\frac{1}{15}}{x+\frac{10}{15}}=\frac{5}{6}∙\left(\frac{x+\frac{10}{15}}{x+\frac{10}{15}}-\frac{\frac{1}{15}}{x+\frac{10}{15}}\right)=\frac{5}{6}∙\left(1-\frac{1}{15\left(x+\frac{10}{15}\right)}\right)=\frac{5}{6}-\frac{5}{6}∙\frac{1}{15x+10}=\frac{5}{6}-\frac{\frac{1}{18}}{x+\frac{2}{3}}$$

$$m:y=\frac{-4x-6}{2x+1}$$

Lineární lomená funkce je podílem dvou lineárních dvojčlenů.

Obecně

$f:y=\frac{ax+b}{cx+d}$ , kde $a, b, c, d \in R ;c\ne 0$.

Zde tedy a = -4, b = -6, c = 2, d = 1

Horizontální (vodorovná) asymptota je vždy

$a\_{1}:y=\frac{a}{c}$, takže y = -2

Odpovídá vždy částečnému podílu, z lineárních (x-ových) členů

Vertikální (svislá) asymptota

$a\_{2}:x=-\frac{d}{c}$, takže x = -1/2

Tato zakázaná hodnota x odpovídá řešení rovnice cx + d = 0, protože tak to právě vyjít nesmí!

$$cx+d\ne 0$$

$$cx\ne -d$$

$$x\ne -\frac{d}{c}$$

$$m:y=\frac{-4x-6}{2x+1}=\frac{-4(x+\frac{3}{2})}{2(x+\frac{1}{2})}=-2∙\frac{x+\frac{1}{2}+1}{x+\frac{1}{2}}=-2∙\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)=-2∙\left(1+\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)=-2-\frac{2}{x+\frac{1}{2}}$$

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | -1/2 | 0 | 1 | 2 |
| x+1/2 | -5/2 | -3/2 | -1/2 | 0 | 1/2 | 3/2 | 5/2 |
| 2/(x+1/2) | -4/5 | -4/3 | -4 | nelze | 4 | 4/3 | 4/5 |
| -2 – 2(x+1/2) | -6/5-1,2 | -2/3-0,67 | 2 | nelze | -6 | -10/3-3,33 | -14/5-2,8 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

**Úloha 5**

Upravte předpisy lineárních lomených funkcí tak, aby bylo možné nakreslit jejich graf. Poté grafy nakreslete, s využitím vhodné tabulky.

1. $f:y=\frac{x+1}{x-2}$
2. $g:y=\frac{x+2}{x+1}$
3. $h:y=\frac{x-1}{x+2}$

**Úloha 6**

Upravte předpisy lineárních lomených funkcí tak, aby bylo možné nakreslit jejich graf. Poté grafy nakreslete, s využitím vhodné tabulky.

1. $f:y=\frac{2x-4}{x+1}$
2. $g:y=\frac{x+2}{2x-3}$
3. $h:y=\frac{3x-1}{x+1}$

Doplňte tabulky a sestavte grafy následujících funkcí.

**Úloha 1 (novinka)**

Doplňte tabulku a nakreslete graf funkce $f:y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ (má smysl jen pro $x\geq 0$)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,81 | 1 | 2 | 3 | 4 | 9 |
| $$f:y=x^{\frac{1}{2}}$$(=$\sqrt{x}$) | 0 | 0,5 | 0,707… | 0,9 | 1 | 1,414… | 1,732… | 2 | 3 |

**Úloha 2 (opakovací)**

Doplňte tabulku a nakreslete graf kvadratické funkce $g:y=x^{2}$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 2 | 3 |
| $$f:y=x^{2}$$ | 9 | 4 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 4 | 9 |

**Úloha 3 (srovnávací)**

Porovnejte oba grafy a zapište, co je na tomto srovnání zajímavého.

Pravá polovina grafu funkce $g:y=x^{2}$ a graf funkce $f:y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ jsou navzájem osově souměrné podle osy I. a III. Kvadrantu (podle funkce h: y = x).

Toto nastává vždy, když porovnáváme navzájem inverzní funkce (protichůdné funkce).

**Inverzní funkce**

$$f:y=4x+6$$

$f^{-1}$ … značka pro inverzní funkci

Původní funkce f dělá toto

x = -1 tak f(x) = 2

x = 0 tak f(x) = 6

x = 1 tak f(x) = 10

Inverzní by měla

x = 2 tak f(x) = -1

x = 6 tak f(x) = 0

x = 10 tak f(x) = 1

$$x=4y+6$$

$$x-6=4y$$

$$f^{-1}:y=\frac{x-6}{4}$$

Mocninné funkce s racionálním exponentem odpovídají vzorci

$$f:y=x^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{x^{r}}$$

Příklady

$$p:y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$

$$q:y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$$

$$r:y=x^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{x^{2}}$$

$$f:y=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{x^{3}}=\sqrt[2]{x.x^{2}}=x∙\sqrt{x}$$

Definováno jen pro nezáporná x.

(Záporné číslo nelze odmocňovat sudým odmocnitelem, pro SŠ-účely se zapovídá i lichý odmocnitel.)