**Zápisky k permutacím z 28. 1. 2021**

**Úloha A**

Určete, kolika způsoby může 10táborníků nastoupit na rozcvičku:

1. do řady (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J)

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J (1. způsob)

A, B, C, D, E, F, G, H, J, I

A, B, C, D, E, F, G, I, H, J

A, B, C, D, E, F, G, I, J, H

…

J, I, H, G, F, E, D, C, B, A

Kombinatorické pravidlo součinu

10-tici prvků, kde 1. prvek je 10-členné množiny, 2. prvek z 9-členné množiny, 3. z 8-členné, …, 9. prvek z 2 – členné, 10. prvek z 1-členné

Počet možností

$10∙9∙8∙7∙6∙5∙4∙3∙2∙1=10!=3 628 800$ možností

10! se čte „10 faktoriál“

Funkce faktoriál(přirozeného čísla\*) … chytne číslo, klesá až do 1, nakonec všechna čísla vynásobí

* existuje i pro 0

$n!=n∙\left(n-1\right)∙\left(n-2\right)…∙3∙2∙1$ vzorec faktoriálu

$$0!=1$$

$$1!=1(=1∙1)$$

$$2!=2∙1=2$$

$$3!=3∙2∙1=3∙2=6$$

$$4!=4∙3∙2∙1=4∙6=24$$

$$5!=5∙4∙3∙2∙1=5∙24=120$$

$n!=n∙\left(n-1\right)!$ vlastnost faktoriálu

F, I, G, H, A, C, B, J, E, D

J, I, H, G, F, E, D, C, B, A

C, B, J, E, D, F, I, G, H, A,

H, B, J, E, D, F, I, G, C, A,

b) do řady, na jejímž kraji stojí táborník Vlčí Dráp,

c) do řady, ve které stojí vedle sebe Vlčí Dráp a Soví Oko,

d) do řady, ve které stojí vedle sebe trojice táborníků Vlčí Dráp, Soví Oko a Medvědí

Tlapa,

e) do řady, ve které Vlčí Dráp nestojí vedle Rysího Spáru,

f) do kruhu, v němž záleží pouze na vzájemném umístění táborníků a ne na jejich

poloze vzhledem k okolí.

**Úloha 25**

Na osobním oddělení velké firmy pracuje jako obyčejný zaměstnanec *z* žen a *m*

mužů. Počet žen je větší než počet mužů. Kromě nejvyšší vedoucí, která má

v mimořádné oblibě hromadné nástupy, má oddělení navíc ještě tři další vedoucí

pracovníky, kteří se nepočítají ani mezi muže ani mezi ženy. Určete, kolika způsoby je

možné:

a) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady u příležitosti blahopřání vedoucí k významnému životnímu jubileu,

b) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli na začátku řady,

c) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci stáli vedle sebe,

d) postavit všechny zaměstnance oddělení do řady tak, aby vedoucí pracovníci, muži i ženy stáli pohromadě,

e) rozestavit obyčejné zaměstnance do řady tak, aby se pravidelně střídaly ženy s muži a zbývající ženy stály pohromadě na tom z krajů řady, kde by jinak stál muž,

f) rozestavit obyčejné zaměstnance podle pohlaví do dvou kruhů ke hraní stmelovací hry „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“,

g) rozestavit kruh, který ve hře „Já jsem šanon, kdo jsi Ty?“, vyhraje, pokud si vedoucí jeden z kruhů z předchozího bodu vybere a stoupne si v něm na libovolné místo,

h) rozestavit všechny zaměstnance kolem kulatého stolu tak, aby vedoucí měla vedle sebe své oblíbence Petru a Josefa

i) rozestavit do jednoho kruhu všechny muže a potřebný počet žen tak, aby se pohlaví pravidelně střídalo.

**Permutační úlohy, využití faktoriálu**

**Úloha 1**

Sportovního turnaje se účastní 5 družstev. Kolik existuje možných konečných pořadí?

Volejbal: Brazílie, Rusko, Itálie, Srbsko, Čína

1. místo: někdo z těch 5
2. místo: někdo z těch 4 (co nevyhráli)
3. místo: někdo z těch 3 (co nezískali vyšší místa)
4. místo: někdo z těch 2 (co nezískali vyšší místa)
5. místo: někdo z těch 1 (co nezískal vyšší místa)

$5∙4∙3∙2∙1=5!=120$ možností, jak turnaj dopadne.

**Úloha 2**

Kolika způsoby se může seřadit při rozlosování do řady 10 dětí na letním táboře?

Počet možností

$10∙9∙8∙7∙6∙5∙4∙3∙2∙1=10!=3 628 800$ možností

Začíná se nám tvořit skupina velmi podobných úloh.

Říkáme jim permutační úlohy.

Permutace = prohazování.

Permutační úlohy jsou takové, kde různé možnosti vznikají pouhým prohozením prvků.

Poznatek: Již nyní umíme řešit pomocí kombinatorického pravidla součinu, ale existuje i speciální vzorec na tyto úlohy.

Vytvářím permutace (prohození) na *n* členné množině. Počet permutací (prohození) na *n* členné množině je *n*-té permutační číslo $P\left(n\right)=n!$

**Úloha 3**

Tři obětovaní studenti losují o pořadí, ve kterém se nechají „dobrovolně“ vyzkoušet. Kolika způsoby může losování skončit?

Je to permutační úloha, první možností je podle abecedy Adam, Bára, Cyril (1. přehození), anebo jinak (další).

n = 3

P(3) = 3! = 3 x 2 x 1 = 6

„permutace na 3 prvcích“

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA (6 možností)

3 x 2 x 1

**Úloha 4**

Najděte společné rysy předchozích příkladů.

**Úloha 5**

Určete a zapište počet permutací z *n* prvků.

**Úloha 6**

Rozepište a vypočtěte

1. $P\left(5\right)=5!$
2. $P\left(1\right)=1!$
3. $P\left(3\right)=3!$
4. $P\left(4\right)=4!$
5. $P\left(50\right)=50!=3,041… ∙10^{64}$

**Úloha 7**

Vypište všechny permutace ze 3 prvků $\left\{a;b;c\right\}$.

**Úloha 8**

Televizního pořadu, ve kterém diváci kladou politikům nepříjemné otázky, se účastní i občané Nora, Oldřich, Pavlína, Radek, Stanislav, Tamara a Uršula. Každý účastník může položit jednu otázku. Určete počet všech možných pořadí, ve kterých:

a) mohou položit své dotazy,

b) položí dotazy nejdříve ženy a pak muži,

c) položí svůj dotaz Pavlína a hned po ní Radek,

d) Nora položí svůj dotaz dřív než Tamara.

1. mohou položit své dotazy,

7 \* 6 \* 5 \* 4 \* 3 \* 2 \* 1 = 7! = 5040 = P(7)

1. položí dotazy nejdříve ženy a pak muži

(ženské na 4 prv) \* (mužské na 3 prv)

4! = 24

3! = 6

Seznam 24 ženských řad

Seznam 6 mužských řad

P1 ze 24

P2 ze 6

24 \* 6 = 144 možností

**Podpůrný list I ke kombinatorickému pravidlu součinu**

**Kombinatorické pravidlo součinu**

Jestliže sestavujeme k-tici prvků $\left(p\_{1},p\_{2},…,p\_{k}\right)$, kde každý prvek $p\_{i}$ vybíráme z množiny $M\_{i}$ o velikosti $n\_{i}$ (přitom $i=1,2,...,k$), potom počet možností, jak k-tici sestavit je součin velikostí množin $n\_{1}∙n\_{2}∙…∙n\_{k}$.

**Kombinatorika - zápis ze čtvrtka 21. 1. 2021**

Kolik pětimístných PIN - kódů můžeme vytvořit s použitím sudých číslic?

Z cifer 0, 2, 4, 6, 8 skládáme 5-místný PIN-kód, nikdo nám nezapověděl jejich opakování.

00000, 00002, 00004, 00006, 00008, 00020, 00022, …, 88888 (pozor, kódy na rozdíl od čísel, mohou začínat 0)

Otázka zní: Kolik takových kódů je?

Na každé pozici mám 5 možností, jak ji vyplnit.

První dvojčíslí už má 5\*5 = 25 možností!

00, 02, 04, 06, 08, 20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 46, 48, 60, 62, 64, 66, 68, 80, 82, 84, 86, 88

Zvolím 1. cifru 5 způsoby, k ní přivolím další 5 způsoby (to už je 25) a potom zase (125), potom 625/4. cifra, 3125/5. cifra.

$$5∙5∙5∙5∙5=5^{5}=3125$$

**Kombinatorické pravidlo součinu**

Jestliže skládáme k-tici prvků $\left(p\_{1},p\_{2},…,p\_{k}\right)$, kde $p\_{i}$ vybíráme z množiny$M\_{i}$ o velikosti $n\_{i}$, potom počet možností, jak k-tici složit je součin velikostí množin $n\_{1}∙n\_{2}∙…∙n\_{k}$.

Skládáme pětici cifer.

k = 5

p1 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8), což znamená 5 možností z 5-členné množiny

p2 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8), což znamená 5 možností z 5-členné množiny

p3 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8), což znamená 5 možností z 5-členné množiny

p4 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8), což znamená 5 možností z 5-členné množiny

p5 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8), což znamená 5 možností z 5-členné množiny

$$5∙5∙5∙5∙5=5^{5}=3125$$

**Kombinatorické pravidlo součinu**

Jestliže skládáme k-tici prvků $\left(p\_{1},p\_{2},…,p\_{k}\right)$, kde $p\_{i}$ vybíráme z množiny$M\_{i}$ o velikosti $n\_{i}$, potom počet možností, jak k-tici složit je součin velikostí množin $n\_{1}∙n\_{2}∙…∙n\_{k}$.

**Další úloha**

Kolik pětimístných PIN - kódů můžeme vytvořit s použitím sudých číslic, tak aby se žádná cifra neopakovala?

02468, 02486, 02648, 02684, …, 86204, 86240, 86402, 86420 – jen tento typ se uznává.

Skládáme pětici cifer.

k = 5

p1 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8), což znamená 5 možností z 5-členné množiny

p2 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8) bez 1 použitého členu, což znamená 4 možnosti z 5-členné množiny

p3 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8) bez 2 použitých členů, což znamená 3 možnosti z 5-členné množiny

p4 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8) bez 3 použitých členů, což znamená 2 možnosti z 5-členné množiny

p5 je cifra z (0, 2, 4, 6, 8) bez 4 použitých členů, což znamená 1 možnost z 5-členné množiny

$$5∙4∙3∙2∙1=20∙6=120$$

Mám jen 120 takových možností.