**Vzorový a podpůrná kombinatorika na závěr února, sestaveno 17. 2. 2021**

**Kombinatorické pravidlo součinu (pěkná formulace podle realisticky.cz)**

Počet všech uspořádaných *k*-tic, jejichž první člen lze vybrat $n\_{1}$ způsoby, druhý člen (po provedeném výběru prvního) $n\_{2}$ způsoby atd. až *k*-tý člen (po provedeném výběru všech předcházejících) $n\_{k}$ způsoby, je roven $n\_{1}∙n\_{1}∙…∙n\_{k}$.

**Permutace (bez opakování)**

Permutace z *n* prvků je uspořádaná *n-tice* sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

(Existují také permutace s opakováním, kde není omezení na jeden výskyt prvku. Nejsou součástí tematického plánu. Ani nebývají předmětem státních maturit z matematiky.)

Počet permutací z *n* prvků vyplývá z kombinatorického pravidla součinu a odpovídá permutačnímu číslu (faktoriálu):

$$P\left(n\right)=n!=n⋅\left(n-1\right)⋅\left(n-2\right)⋅...⋅3⋅2⋅1$$

**Variace (bez opakování)**

Variace *k*-té třídy na *n* prvcích je uspořádaná *k-tice* vybraná z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

(Existují také variace s opakováním, kde není omezení na jeden výskyt prvku. Nejsou součástí tematického plánu. Ani nebývají předmětem státních maturit z matematiky.)

Počet variací *k*-té třídy na *n* prvcích vyplývá z kombinatorického pravidla součinu a odpovídá vzorci:

$$V\_{k}(n)=n⋅\left(n-1\right)⋅\left(n-2\right)⋅...⋅(n-k+1)=\frac{n!}{\left(n-k\right)!}$$

**Kombinace (bez opakování)**

Kombinace *k*-té třídy na *n* prvcích je neuspořádaná (\*) *k-tice* vybraná z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

(Existují také kombinace s opakováním, kde není omezení na jeden výskyt prvku. Nejsou součástí tematického plánu. Ani nebývají předmětem státních maturit z matematiky.)

(\*) Pojem neuspořádaná naznačuje, že nezáleží na pořadí prvků, jen na jejich zařazení do výběru.

Počet kombinací *k*-té třídy na *n* prvcích vyplývá (dosti krkolomně) z kombinatorického pravidla součinu a odpovídá vzorci:

$$C\_{k}(n)=\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)=\frac{n!}{k!∙\left(n-k\right)!}$$

Značku $\left(\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right)$ čteme „n nad k“ a je vhodné si její vzorec dobře zapamatovat, odvozování úloh přes kombinatorické pravidlo součinu bývá zdlouhavé.

**Jak rozpoznat jednotlivé typy úloh?**

Permutace = Bereme všechny prvky a bedlivě sledujeme pořadí. (n z n prvků + uspořádanost n-tice)

Příklady s přerovnáváním front, tazatelů, přehazováním cifer, knih na poličce apod.

Variace = Bereme některé prvky a bedlivě sledujeme pořadí. (k z n prvků + uspořádanost k-tice, k menší než n)

Příklady s rozdělováním medailí pro nejlepší závodníky, rozdělování stupňovaných funkcí (předseda, 1. místopředseda, 2. místopředseda, pokladník, jednatel, …) velkých spolků, řazení cen v omezeném losování apod.

Kombinace = Bereme některé prvky a vůbec nesledujeme pořadí. (k z n prvků + neuspořádanost k-tice, k menší než n)

Příklady s výběrem delegace rovnoprávných členů, nabírání karet z balíčku (hráč si je může přerovnat podle libosti), hraním skupinových turnajů na jeden zápas (nezáleží na struktuře domácí-hosté) apod.

**Okrajové případy**

Permutace je speciální krajní případ variace, kde k = n splývají. Podobně existují speciální případy kombinací, hrají silnou roli v tzv. Pascalově trojúhelníku.

**Příklady permutačních úloh podle realisticky.cz**

****

**Práce s faktoriály a permutacemi – převzatá ukázka podle realisticky.cz**



**Příklady variačních úloh podle realisticky.cz**



**Příklady kombinačních úloh podle realisticky.cz**





**Kombinační číslo a Pascalův trojúhelník**

Kombinační čísla v uvedeném schématu

$$\left(\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}4\\4\end{matrix}\right)$$

 ……………………………………………………...

 ………………………………………………………………………………..

vytvoří zajímavou strukturu (pokračuje do nekonečna), v níž každé číslo je součtem dvou čísel, které nese „na svých ramenou“.

