**Kombinace a kombinační čísla na 13. 3. – 19. 3. 2021**

**Obsah**

1) Vzorec

2) Úloha

3) Vzorové řešení

4) Bonusové povídání + bonusové příklady

5) Soupis starších vzorců

**Kombinace (bez opakování)**

Kombinace *k*-té třídy na *n* prvcích je neuspořádaná (\*) *k-tice* vybraná z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

(Existují také kombinace s opakováním, kde není omezení na jeden výskyt prvku. Nejsou součástí tematického plánu. Ani nebývají předmětem státních maturit z matematiky.)

(\*) Pojem neuspořádaná naznačuje, že nezáleží na pořadí prvků, jen na jejich zařazení do výběru.

Počet kombinací *k*-té třídy na *n* prvcích vyplývá (dosti krkolomně) z kombinatorického pravidla součinu a odpovídá vzorci:

Značku čteme „n nad k“ a je vhodné si její vzorec dobře zapamatovat, odvozování úloh přes kombinatorické pravidlo součinu bývá zdlouhavé.

**Kombinační úloha k vypracování**

Na jídelním lístku je 12 druhů jídel. Kolika způsoby můžeme vybrat 4 různá jídla do denního menu? (Použijte kombinaci, na přesném pořadí jídel v lístku nezáleží.)

**Nápověda: Kombinační úloha se vzorovým řešením**

Vzorec (počet kombinací k-té třídy na n prvcích, resp. kombinační číslo n nad k)

*Ve třídě je 30 žáků, z nichž tři budou zkoušení. Kolikerým způsobem je to možné, jestliže nezáleží na jejich pořadí?*

Postup bez vzorce, kombinatorickým pravidlem součinu – je v tomto případě již dosti komplikovaný.

Postup se vzorcem

Jelikož z žáků vybíráme podmnožinu zkoušených, ale nezajímá nás pořadí, v němž jdou k tabuli (a samozřejmě ani žádné pořadí zbylých žáků), jedná se o kombinaci. Sledujeme k = 3 (výběr 3 zkoušených) a n = 30 (ze 30 žáků).

Je to možné 4 060 způsoby.

**Bonus: Kombinační číslo a Pascalův trojúhelník**

**Znovu si pročtěte teorii, bonusově můžete ověřit vybraná místa v trojúhelníku početně**

Kombinační čísla v uvedeném schématu

 …………………………………………………………………

 …………………………………………………………………………………….

vytvoří zajímavou strukturu (pokračuje do nekonečna), v níž každé číslo je součtem dvou čísel, které nese „na svých ramenou“. Přitom se pro účely matematické elegance zavádí , aby se dalo vše dopočítat a zapadalo do jiných vzorců.

(Zajímavé je, že jsem velmi nedávno zjistil, že některé kalkulačky umí “šarlánsky” spočítat faktoriály necelých kladných čísel, předpokládám, že pomocí tzv. Gama (integrální) funkce, o níž nám něco říkali ve 2. ročníku MFF UK.)

Pascalův trojúhelník po vypočítání získá tuto podobu:



Zajímavé je, že každé číslo je součtem čísel na svých ramenou. Např. číslo 6 nese na svých ramenou 3 + 3, jinde v pyramidě 5 + 1. Číslo 84 nese na ramenou čísla 56 + 28.

Pokud špičku pyramidy nazveme nultým řádkem a levý kraj pyramidy nultým sloupcem, potom platí: “Číslo najdeme v n-tém řádku a k-tém sloupci Pascalova trojúhelníku.”

**Příklad**

**Vlastní bonusové úlohy**

**Ověřte POČETNĚ platnost Pascalova trojúhelníka pro vybrané položky**

a) (7. řádek, 2. sloupec; opticky 8. řádek, 3. sloupec)

b) (8. řádek, 4. sloupec; opticky 9. řádek, 5. sloupec)

c) (9. řádek, 6. sloupec; opticky 10. řádek, 7. sloupec)

d) , tedy Pascalův trojúhelník je osově souměrný, na n-tém řádku je k-tá nekrajní buňka zleva totožná s k.tou nekrajní buňkou zprava.

e) , tedy každé číslo je součtem čísel na svých ramenou.

**Starší vzorce , které na tento list příliš nepomohou**

**Kombinatorické pravidlo součinu (pěkná formulace podle realisticky.cz)**

Počet všech uspořádaných *k*-tic, jejichž první člen lze vybrat způsoby, druhý člen (po provedeném výběru prvního) způsoby atd. až *k*-tý člen (po provedeném výběru všech předcházejících) způsoby, je roven .

**Permutace (bez opakování) – obvykle vyjde obtížností nastejno s předchozím pravidlem**

Permutace z *n* prvků je uspořádaná *n-tice* sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou. (Existují také permutace s opakováním, kde není omezení na jeden výskyt prvku. Nejsou součástí tematického plánu. Ani nebývají předmětem státních maturit z matematiky.)

Počet permutací z *n* prvků odpovídá permutačnímu číslu (faktoriálu):

**Variace (bez opakování) – obvykle se moc nevyplatí**

Variace *k*-té třídy na *n* prvcích je uspořádaná *k-tice* vybraná z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

(Existují také variace s opakováním, kde není omezení na jeden výskyt prvku. Nejsou součástí tematického plánu. Ani nebývají předmětem státních maturit z matematiky.)

Počet variací *k*-té třídy na *n* prvcích vyplývá z kombinatorického pravidla součinu a odpovídá vzorci: