**Matematika pro K2, úkol na další dálkový úsek (17. 4. - 23. 4.)**

Vyřešte tyto úlohy a odešlete ke kontrole na [jan.hoffmann@sskk.cz](mailto:jan.hoffmann@sskk.cz) .

Doporučuji studium přidaného podpůrného textu z mé loňské dílny, tvořil jsem jej primárně pro účely dálkové výuky, což je výhodou. Bude-li text na mnohé z Vás i tak příliš hutný, určitě jej v dalších hodinách citlivě rozklíčuji.

**Úlohy se zadáním posloupnosti pomocí dvou členů (krátký úkol)**

Vyjádřete aritmetickou posloupnost pomocí 1. členu a diference, jestliže znáte hodnoty

1. ,
2. ,
3. ,
4. ,

**Vzorce (použitelné na předcházející, dá se i bez nich vše vymyslet) – stručná podpora**

Vzorec pro výpočet *s*-tého členu z *r*-tého členu

Vzorec pro výpočet diference z libovolných dvou členů

Rekurentní určení následujícího členu

Vzorec pro *n*-tý člen

**Podpůrný text: Aritmetické posloupnosti**

**Základní myšlenka, charakterizace 1. členem a diferencí**

Aritmetické posloupnosti jsou ,,schodovité seznamy čísel´´, neustále klesáme nebo rosteme o stejné číslo.

Aritmetická posloupnost je charakterizována vždy dvojicí čísel, číslo značí první člen posloupnosti (její start), zatímco číslo značí její typickou změnu (kladnou pro růst, zápornou pro pokles, nulovou pro tzv. konstantní posloupnost).

Např. posloupnost čísel 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, … má princip ,,začni číslem 8, potom klesej vždy o 2´´, což zapíšeme jako , . Jde tedy o posloupnosti s 1. členem 8 a diferencí -2. Záporná diference značí, že posloupnost bude klesající.

Značkučteme jako *n-tý člen posloupnosti*. V tomto případě např. , (hodnota 5. a 10. členu posloupnosti).

**Výpočet členu posloupnosti z pořadového čísla, konstrukce vzorce**

A co když máme najít hodnotu 17. členu posloupnosti V takovém případě se nabízí následující postup – z 1. čísla do 2. čísla musíme udělat 1 krok (tedy 2. člen 6 je o 1x2 = 2 menší než 8), zatímco třeba do 6. čísla musíme udělat 5 kroků (tedy 2. člen -2 je o 5x2 = 10 menší než 8). Do 17. členu potřebujeme 16 kroků od počátku, a tak klesneme o 16x2 = 32, tedy 8 – 32 = -24, což je hodnota 17. členu.

Nyní odvoďme univerzální vzorec. Jestliže hledáme nějaký (n-tý) člen aritmetické posloupnosti, začneme v 1. členu a uděláme o 1 krok méně (n - 1) o velikosti d, což matematicky zapisujeme

V již uváděném příkladě nabude vzorec podoby .

Z tohoto předpisu můžeme dále odvodit vzorec pro každý člen této posloupnosti

.

A tak můžeme 17. člen počítat také přímým dosazením .

**Shrnutí (4 různé zápisy stejné posloupnosti)**

Posloupnost tak můžeme zapisovat čtyřmi způsoby

1. způsob je neúplný výčet: 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, …

2. způsob je 1. členem a diferencí: ,

3. způsob je pomocí vzorce pro n-tý člen (na dosazení):

4. způsob je tzv. rekurentní: , (říká – začni číslem 8 a každé příští bude o 2 menší proti svému předchůdci

**Další příklady**

1. , , , , ,,… (zadáno neúplným výčtem)

Aritmetická posloupnost s prvním členem 7 a (kladnou) diferencí 2.

Stačí psát , - zápis 1. členem a diferencí. Vzorec pro n-tý člen nás vede k úvaze , takže jsme získali . A nakonec rekurentní vzorec na principu – začni 7 a přidávej po 2, ten má podobu , .

1. , , , , ,,…

Aritmetická posloupnost s prvním členem 11 a (zápornou) diferencí -3.

Stačí psát , . Přímý vzorec má podobu . Rekurentní vzorec má podobu , .

**Další alternativy zápisu**

c) Máme nekonečnou posloupnost čísel Můžeme ji zapsat zkráceně

Zápis vzorcem pro n-tý člen: Je zřejmé, že jde o trojnásobky indexů (,,čísílek, malých čísel´´). Proto máme zápis

Posloupnost . Případně také můžeme psát rovnou .

Dolní index n = 1 a horní index ∞ znamenají -členy číslujeme od 1. (přes 2., 3., 4., 5., …) až do nekonečna (nekonečného místa v pořadí).

Rekurentní zápis: Vychází z myšlenky – 1) začni trojkou, 2) neustále zvyšuj o trojku – příští člen (n+1)-ní je o 3 větší než aktuální n-tý. To zapisujeme následovně

Posloupnost .

V některých případech jsou výhodnější zápisy vzorcem – včetně tohoto příkladu. V jiných případech jsou výhodnější zápisy rekurentní. Často se stává, že jeden ze zápisů v rozumné podobě neexistuje a jsme tak odkázáni na ten druhý.

**Další vzorce s aritmetickými posloupnostmi**

Vztahy mezi dvěma obecnými členy jsou popsány vzorci

s-tý člen v pořadí je (s-r) diferencí (kroků, skoků) od r-tého členu

Známe-li např. 4. člen posloupnosti a diferenci , nalezneme 10. člen přičtením 6 diferencí ke 4. členu . V takovém případě r = 4, s = 10, s – r = 6.

diferenci v aritmetické posloupnosti můžeme vypočítat jako podíl na větším skoku vzdálenějších členů

Známe-li např. 3. a 7. člen posloupnosti , bude diference čtvrtinou rozdílu mezi 7. a 3. členem. V takovém případě r = 3, s = 7, s – r = 4.

Součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti počítáme podle vzorce

Jinak řečeno – sčítáme krajní členy a pronásobujeme počtem párů, které lze takto vytvořit. (Platí i na liché délky sčítaného úseku posloupnosti, kde přebývá prostřední číslo jakožto ,,půlka páru´´).

O historii tohoto postupu si přečtěte zde

<http://fyzmatik.pise.cz/706-gaussuv-soucet-aritmeticke-posloupnosti.html>

Jde o klasickou ukázku, v níž , což dále vede na aplikaci vzorce

(Každá z 50 stojedniček vznikne sečtením dvou protilehlých čísel, čímž vzniká oněch 50 párů.)

**Posloupnosti, které nejsou aritmetické**

Posloupnost s neúplným výčtem 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, … není aritmetická, protože nemá diferenci. Nejprve naroste o 2, poté o 6, poté o 18, poté o 54, takže princip je jiný.

Patří mezi tzv. geometické posloupnosti, kde další člen vznikne přenásobením předchozího členu. (Případně vydělením, což je vlastně násobení zlomkem.) V tomto případě jde tedy o geometrickou posloupnost s a tzv. Kvocientem . Zákonitost posloupnosti je zjevná, ale patří do jiné kategorie.

Legendární posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, … vstoupila do dějin (nejen) matematiky pod názvem Fibonacciho posloupnost. Nepatří ani mezi aritmetické, ani mezi geometrické posloupnosti, přesto je její princip poměrně zjevný, nejlépe zapsatelný rekurentně:

První dva členy jsou jedna a každý další člen vzniká jako součet dvou předchozích členů.