**Matematika pro K2, úkol na další dálkový úsek (24. 4. - 30. 4.)**

Vyřešte spojovačku s aritmetickými posloupnostmi a odešlete ke kontrole na jan.hoffmann@sskk.cz .

**Spojovačka**

Ve třech sloupcích máte 3 různé formy zápisu posloupností, spojte totožné posloupnosti.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| První člen a diference | Zápis vzorcem pro n-tý člen | Rekurentní vyjádření |
| $$a\_{1}=4,d=-\frac{1}{2}$$ | $$a\_{n}=\frac{-8+2n}{3}$$ | $$a\_{1}=4,a\_{n+1}=a\_{n}+\frac{2}{3}$$ |
| $$a\_{1}=4,d=\frac{2}{3}$$ | $$a\_{n}=\frac{9-n}{2}$$ | $$a\_{1}=-2,a\_{n+1}=a\_{n}-\frac{1}{2}$$ |
| $$a\_{1}=-2,d=-\frac{1}{2}$$ | $$a\_{n}=\frac{10+2n}{3}$$ | $$a\_{1}=-2,a\_{n+1}=a\_{n}+\frac{2}{3}$$ |
| $$a\_{1}=-2,d=\frac{2}{3}$$ | $$a\_{n}=\frac{-3-n}{2}$$ | $$a\_{1}=4,a\_{n+1}=a\_{n}-\frac{1}{2}$$ |

**Vzorce (použitelné na předcházející, dá se i bez nich vše vymyslet) – stručná podpora**

Rekurentní určení následujícího členu

$$a\_{n+1}=a\_{n}+d$$

Vzorec pro *n*-tý člen

$$a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)∙d$$

**Podpůrný studijní text: Aritmetické posloupnosti**

**Základní myšlenka, charakterizace 1. členem a diferencí**

Aritmetické posloupnosti jsou ,,schodovité seznamy čísel´´, neustále klesáme nebo rosteme o stejné číslo.

Aritmetická posloupnost je charakterizována vždy dvojicí čísel, číslo $a\_{1}$ značí první člen posloupnosti (její start), zatímco číslo $d$značí její typickou změnu (kladnou pro růst, zápornou pro pokles, nulovou pro tzv. konstantní posloupnost).

Např. posloupnost čísel 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, … má princip ,,začni číslem 8, potom klesej vždy o 2´´, což zapíšeme jako $a\_{1}=8$, $d=-2$. Jde tedy o posloupnosti s 1. členem 8 a diferencí -2. Záporná diference značí, že posloupnost bude klesající.

Značku$a\_{n}$čteme jako *n-tý člen posloupnosti*. V tomto případě např. $a\_{5}=0$, $a\_{10}=-10$(hodnota 5. a 10. členu posloupnosti).

**Výpočet členu posloupnosti z pořadového čísla, konstrukce vzorce**

A co když máme najít hodnotu 17. členu posloupnosti $a\_{17}=?$ V takovém případě se nabízí následující postup – z 1. čísla do 2. čísla musíme udělat 1 krok (tedy 2. člen 6 je o 1x2 = 2 menší než 8), zatímco třeba do 6. čísla musíme udělat 5 kroků (tedy 2. člen -2 je o 5x2 = 10 menší než 8). Do 17. členu potřebujeme 16 kroků od počátku, a tak klesneme o 16x2 = 32, tedy 8 – 32 = -24, což je hodnota 17. členu.

Nyní odvoďme univerzální vzorec. Jestliže hledáme nějaký (n-tý) člen aritmetické posloupnosti, začneme v 1. členu a uděláme o 1 krok méně (n - 1) o velikosti d, což matematicky zapisujeme

 $a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)∙d$

V již uváděném příkladě nabude vzorec podoby $a\_{17}=a\_{1}+\left(17-1\right)∙d=8+16∙\left(-2\right)=8-32=-24$.

Z tohoto předpisu můžeme dále odvodit vzorec pro každý člen této posloupnosti

$a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)∙d=8+\left(n-1\right)∙\left(-2\right)=8-2\left(n-1\right)=8-2n+2=10-2n$.

A tak můžeme 17. člen počítat také přímým dosazením $a\_{17}=10-2∙17=10-34=-24$.

**Shrnutí (4 různé zápisy stejné posloupnosti)**

Posloupnost tak můžeme zapisovat čtyřmi způsoby

1. způsob je neúplný výčet: 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, …

2. způsob je 1. členem a diferencí: $a\_{1}=8$, $d=-2$

3. způsob je pomocí vzorce pro n-tý člen (na dosazení): $a\_{n}=10-2n$

4. způsob je tzv. rekurentní: $a\_{1}=8$, $a\_{n+1}=a\_{n}-2$(říká – začni číslem 8 a každé příští bude o 2 menší proti svému předchůdci

**Další příklady**

1. $a\_{1}=7$, $a\_{2}=9$, $a\_{3}=11$, $a\_{4}=13$, $a\_{5}=15$,$a\_{6}=17$,… (zadáno neúplným výčtem)

Aritmetická posloupnost s prvním členem 7 a (kladnou) diferencí 2.

Stačí psát $a\_{1}=7$, $d=2$- zápis 1. členem a diferencí. Vzorec pro n-tý člen nás vede k úvaze $a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)∙d=8+\left(n-1\right)∙\left(-2\right)=8-2\left(n-1\right)=8-2n+2=10-2n$, takže jsme získali $a\_{n}=5+2n$. A nakonec rekurentní vzorec na principu – začni 7 a přidávej po 2, ten má podobu $a\_{1}=7$, $a\_{n+1}=a\_{n}-2$.

1. $a\_{1}=11$, $a\_{2}=8$, $a\_{3}=5$, $a\_{4}=2$, $a\_{5}=-1$,$a\_{6}=-4$,…

Aritmetická posloupnost s prvním členem 11 a (zápornou) diferencí -3.

Stačí psát $a\_{1}=11$, $d=-3$. Přímý vzorec má podobu $a\_{n}=14-3n$. Rekurentní vzorec má podobu $a\_{1}=11$, $a\_{n+1}=a\_{n}-3$.

**Další alternativy zápisu**

c) Máme nekonečnou posloupnost čísel $a\_{1}=3,a\_{2}=6,a\_{3}=9,a\_{4}=12,a\_{5}=15,…$ Můžeme ji zapsat zkráceně $\left(a\_{n}\right)\_{n=1}^{\infty }=\left(3,6,9,12,15,…\right)$

Zápis vzorcem pro n-tý člen: Je zřejmé, že jde o trojnásobky indexů (,,čísílek, malých čísel´´). Proto máme zápis

Posloupnost $\left(a\_{n}\right)\_{n=1}^{\infty },a\_{n}=3n$. Případně také můžeme psát rovnou $\left(3n\right)\_{n=1}^{\infty }.$.

Dolní index n = 1 a horní index ∞ znamenají -členy číslujeme od 1. (přes 2., 3., 4., 5., …) až do nekonečna (nekonečného místa v pořadí).

Rekurentní zápis: Vychází z myšlenky – 1) začni trojkou, 2) neustále zvyšuj o trojku – příští člen (n+1)-ní je o 3 větší než aktuální n-tý. To zapisujeme následovně

Posloupnost $\left(a\_{n}\right)\_{n=1}^{\infty },a\_{1}=3,a\_{n+1}=a\_{n}+3$.

V některých případech jsou výhodnější zápisy vzorcem – včetně tohoto příkladu. V jiných případech jsou výhodnější zápisy rekurentní. Často se stává, že jeden ze zápisů v rozumné podobě neexistuje a jsme tak odkázáni na ten druhý.

**Další vzorce s aritmetickými posloupnostmi**

Vztahy mezi dvěma obecnými členy jsou popsány vzorci

$$a\_{s}=a\_{r}+\left(s-r\right)∙d$$

s-tý člen v pořadí je (s-r) diferencí (kroků, skoků) od r-tého členu

Známe-li např. 4. člen posloupnosti $a\_{1}=11$ a diferenci $d=3$, nalezneme 10. člen přičtením 6 diferencí ke 4. členu $a\_{10}=a\_{4}+\left(10-4\right)∙d=55+6∙3=55+18=73$. V takovém případě r = 4, s = 10, s – r = 6.

$$d=\frac{a\_{s}-a\_{r}}{s-r}$$

diferenci v aritmetické posloupnosti můžeme vypočítat jako podíl na větším skoku vzdálenějších členů

Známe-li např. 3. a 7. člen posloupnosti $a\_{3}=-3,a\_{7}=-5$, bude diference čtvrtinou rozdílu mezi 7. a 3. členem. $d=\frac{a\_{7}-a\_{3}}{7-3}=\frac{-5+3}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$V takovém případě r = 3, s = 7, s – r = 4.

Součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti počítáme podle vzorce

$$s\_{n}=\frac{n}{2}\left(a\_{1}+a\_{n}\right)$$

Jinak řečeno – sčítáme krajní členy a pronásobujeme počtem párů, které lze takto vytvořit. (Platí i na liché délky sčítaného úseku posloupnosti, kde přebývá prostřední číslo jakožto ,,půlka páru´´).

O historii tohoto postupu si přečtěte zde

<http://fyzmatik.pise.cz/706-gaussuv-soucet-aritmeticke-posloupnosti.html>

Jde o klasickou ukázku, v níž $n=100,a\_{1}=1,a\_{100}=100$, což dále vede na aplikaci vzorce

$$1+2+3+4+...+97+98+99+100=s\_{100}=\frac{100}{2}\left(1+100\right)=50∙101=5050$$

(Každá z 50 stojedniček vznikne sečtením dvou protilehlých čísel, čímž vzniká oněch 50 párů.)

**Posloupnosti, které nejsou aritmetické**

Posloupnost s neúplným výčtem 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, … není aritmetická, protože nemá diferenci. Nejprve naroste o 2, poté o 6, poté o 18, poté o 54, takže princip je jiný.

Patří mezi tzv. geometické posloupnosti, kde další člen vznikne přenásobením předchozího členu. (Případně vydělením, což je vlastně násobení zlomkem.) V tomto případě jde tedy o geometrickou posloupnost s $a\_{1}=1$a tzv. Kvocientem $q=3$. Zákonitost posloupnosti je zjevná, ale patří do jiné kategorie.

Legendární posloupnost 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, … vstoupila do dějin (nejen) matematiky pod názvem Fibonacciho posloupnost. Nepatří ani mezi aritmetické, ani mezi geometrické posloupnosti, přesto je její princip poměrně zjevný, nejlépe zapsatelný rekurentně:

$$a\_{1}=1,a\_{2}=1,a\_{n+2}=a\_{n}+a\_{n+1}$$

První dva členy jsou jedna a každý další člen vzniká jako součet dvou předchozích členů.